

# الأعداد العقدية ( تَمَمَّة )

-I المعادلات من الدرجة الثانية في  $\mathbb{C}$

1- الجذران المربعان لعدد حقيقي غير منعدم :

-a تعريف :

نقول أن العدد العقدي  $z$  جذرا مربعا للعدد الحقيقي  $Z$  إذا وفقط إذا كان :  $z^2 = Z$ .

-b تحديد الجذرين المربعين لعدد حقيقي غير منعدم :

- حالة 1 :  $Z \in \mathbb{R}_+^*$

الجذران المربعان للعدد  $Z$  هما  $\sqrt{Z}$  و  $-\sqrt{Z}$ .

- حالة 2 :  $Z \in \mathbb{R}_-^*$

لدينا :  $Z = -(-Z)$

$$= i^2 (-Z)$$

$$= (\sqrt{-Z} - i)^2$$

إذن : الجذران المربعان للعدد  $Z$  هما  $\sqrt{-Z} i$  و  $-\sqrt{-Z} i$

مثال :  $Z = -3$

$$= 3 i^2$$

إذن الجذران المربعان للعدد  $-3$  هما  $\sqrt{3} i$  و  $-\sqrt{3} i$ .

خاصية :

لكل عدد حقيقي غير منعدم جذران مربعان مختلفان ومتقابلان .

2- المعادلات من الدرجة الثانية في  $\mathbb{C}$

- تعريف :

المعادلة التي تكتب على شكل  $a z^2 + b z + c = 0$  حيث :  $a, b, c$  أعداد حقيقية و  $a \neq 0$  و  $z$  عدد عقدي مجهول ، تسمى معادلة من الدرجة الثانية في  $\mathbb{C}$ .

- حل المعادلات من الدرجة الثانية في  $\mathbb{C}$  :

لتكن  $a, b, c$  أعداد حقيقية حيث  $a \neq 0$ .

لدينا :  $(E) : a z^2 + b z + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + \frac{b}{a} z + \frac{c}{a} = 0$

$$\Leftrightarrow z^2 + 2 \frac{b}{2a} z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{نضع :}$$

ولیکن  $\delta$  أحد الجذرين المربعين للمميز  $\Delta$ .

$$(E) : \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{\delta^2}{4a^2} \quad \text{إنن :}$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = \frac{\delta}{2a} \quad \text{أو} \quad z + \frac{b}{2a} = \frac{-\delta}{2a}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{أو} \quad z = \frac{-b - \delta}{2a}$$

$$(E) : az^2 + bz + c = 0 \quad \text{ومنه : حل المعادلة}$$

$$S = \left\{ \frac{-b + \delta}{2a} ; \frac{-b - \delta}{2a} \right\} \quad \text{هو :}$$

**خاصية :**

حلي المعادلة  $az^2 + bz + c = 0$  حيث  $a \neq 0$  و  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  هما :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

**تطبيقات :**

حل في  $\mathbb{C}$  المعادلات التالية :

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{لدينا :}$$

$$= 1 - 4$$

$$= -3$$

$$= 3i^2$$

$$= (\sqrt{3}i)^2$$

$$S = \sqrt{3}i \quad \text{إنن :}$$

ومنه حلي المعادلة هما :

$$z_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} ; \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right\} \quad \text{ومنه :}$$

$$z^2 + 2z + \frac{1}{\cos^2 \theta} = 0 \quad (2)$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{حيث :}$$

$$z^2 + 2z + \frac{1}{\cos^2 \theta} = 0$$

$$\Delta = 4 - \frac{4}{\cos^2 \theta}$$

$$= 4 \left( 1 - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right)$$

$$= 4 \left( \frac{\cos^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta} \right)$$

$$= 4 \left( \frac{-\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right)$$

$$= -4 \tan^2 \theta$$

$$= (2i \tan \theta)^2$$

$$\delta = 2i \tan \theta \quad \text{إذن :}$$

ومنه : الحلين هما :

$$z_1 = \frac{2 - 2i \tan \theta}{2} = 1 - i \tan \theta$$

$$z_2 = \frac{2 + 2i \tan \theta}{2} = 1 + i \tan \theta$$

$$S = \{1 - i \tan \theta ; 1 + i \tan \theta\} \quad \text{إذن :}$$

طريقة 2 :

$$z^2 - 2z + \frac{1}{\cos \theta} = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$z^2 - 2z + 1 + \tan^2 \theta = 0 \quad \text{أي :}$$

$$(z-1)^2 = -\tan^2 \theta \quad \text{إذن :}$$

$$(z-1)^2 = (i \tan \theta)^2$$

$$z-1 = i \tan \theta \quad \text{أو} \quad z-1 = -i \tan \theta \quad \text{إذن :}$$

$$z = 1 + i \tan \theta \quad \text{أو} \quad z = 1 - i \tan \theta$$

$$S = \{1 - i \tan \theta ; 1 + i \tan \theta\} \quad \text{إذن :}$$

أكتب الحلين على الشكل المثالي.

$$z_1 = 1 - i \tan \theta \quad \text{لدينا :}$$

$$= 1 - i \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{1}{\cos \theta} (\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$= \frac{1}{\cos \theta} (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

$$= \left[ \frac{1}{\cos \theta}, -\theta \right] \quad \text{لأن } 0 < \cos \theta$$

$$z_2 = 1 + i \tan \theta \quad \text{ولدينا :}$$

$$= \frac{1}{\cos \theta} (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= \left[ \frac{1}{\cos \theta}, \theta \right]$$

ملاحظة :

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

إذا كانت :

$$\cos \theta < 0$$

فإن :

$$z_1 = \frac{1}{\cos \theta} (\cos \theta + i \sin \theta)$$

إن :

$$= \frac{-1}{\cos \theta} (-1) (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= \frac{-1}{\cos \theta} [1, \pi] [1, \theta]$$

$$= \frac{-1}{\cos \theta} [1, \pi + \theta]$$

$$= \left[ \frac{-1}{\cos \theta}, \pi + \theta \right]$$

$$R \cdot [r, \theta] = R (r (\cos \theta + i \sin \theta))$$

$$= R \cdot r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= [R r, \theta]$$

**-II صيغة موافر وصيغتنا أولير :**

**1. صيغة Moivre**

$$u = [r, \theta] \quad \text{ليكن}$$

$$|u^n| = |u|^n = 1 \quad \text{نعلم أن}$$

$$\arg u^n = n \theta [2 \pi]$$

$$[1, \theta]^m = [1, m \theta]$$

يعني أن :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n \theta + i \sin n \theta$$

تسمى هذه المتساوية بصيغة موافر.

### تطبيقات صيغة موافر.

1- أنشر :  $(\cos \theta + i \sin \theta)^2$

لدينا :  $(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta$

وبما أن :  $(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$

فإن :

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$$

2- أنشر :  $(\cos \theta + i \sin \theta)^3$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta \cdot i \sin \theta - 3 \cos \theta \cdot \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta$$

$$= (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + i (3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)$$

وبما أن :  $(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$

إذن :

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$$

$$\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta$$

### تعميم :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

لدينا :

$$\cos n\theta = \operatorname{Re} \left( (\cos \theta + i \sin \theta)^n \right)$$

إذن :

$$\sin n\theta = \operatorname{Im} \left( (\cos \theta + i \sin \theta)^n \right)$$

### 2. صيغتا أولير :

1-2 : الترميز الأسّي لعدد عقدي غير منعدم :

نرمز بالرمز  $e^{i\theta}$  حيث  $\theta \in \mathbb{R}$  للعدد العقدي الذي معياره 1 وعمدته  $\theta$ .

أي :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta = [1, \theta]$$

### أمثلة :

1-  $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$

2-  $e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

ملاحظة:

$$z = [R, \theta] \quad \text{-1 إذا كان}$$

$$z = R \cdot e^{i\theta} \quad \text{فإن}$$

$$\arg z_2 \equiv \alpha [2\pi] \quad ; \quad \arg z_1 \equiv \theta [2\pi] \quad \text{-2 إذا كان}$$

$$\arg \frac{z_1}{z_2} \equiv \theta - \alpha \quad ; \quad \arg z_1 \times z_2 \equiv \theta + \alpha [2\pi] \quad \text{فإن}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha}} = e^{i(\theta-\alpha)} \quad ; \quad e^{i\theta} \cdot e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\alpha)}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}$$

-3

$$\arg z^n = n \arg z [2\pi]$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$e^0 = 1$$

$$e^{i\pi} = -1$$

**2-2 : صيغتا أوليبر :**

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{لدينا}$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

إذن :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

نسمي هاتين المتساويتين بصيغتي أوليبر.

ملاحظة:

$$\cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$$

$$\sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$$

تطبيقات صيغتا أوليبر :

La linéarisation

الإخطاط

مثال :

1- أخطط  $\cos^2 \theta$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2}{4} \\ &= \frac{1}{4} (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2) \quad \text{إذن :} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (2 \cos 2\theta) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \end{aligned}$$

2- أخطأ  $\sin^2 \theta$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta &= \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} - 2}{-4} \quad \text{إذن :} \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} \right) + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3- أخطأ  $\cos^3 \theta$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos^3 \theta &= \frac{1}{8} (e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta} \cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \cdot e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}) \\ &= \frac{1}{8} (e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta})) \\ &= \frac{1}{8} (2 \cos 3\theta + 6 \cos \theta) \\ &= \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta \end{aligned}$$

إذن :

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta$$

تعريف :

الإخطاط هو كتابة  $\cos^n x$  و  $\sin^n x$  بدلالة  $\cos kx$  و  $\sin kx$ .

الإخطاط باستعمال صيغة Moivre

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{نضع :}$$

$$\bar{z} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$z \bar{z} = 1$$

$$2 \cos \theta = z + \bar{z} \quad \text{و} \quad 2 i \sin \theta = z - \bar{z}$$

$$z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$\bar{z}^n = \cos n\theta - i \sin n\theta$$

$$z^n \cdot \bar{z}^n = 1$$

$$2 \cos n\theta = z^n + \bar{z}^n \quad \text{و} \quad 2 i \sin n\theta = z^n - \bar{z}^n$$

$$2 \cos \theta = z + \bar{z}$$

$$8 \cos^3 \theta = (z + \bar{z})^3$$

$$= z^3 + 3 z^2 \bar{z} + 3 z \bar{z}^2 + \bar{z}^3$$

$$= z^3 + \bar{z}^3 + 3(z + \bar{z})$$

$$= 2 \cos 3\theta + 3 \times 2 \cos \theta$$

$$= \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta$$

أخطط

لدينا:

### التمثيل العقدي للدوران

المستوى العقدي منسوب الى معلم م م م  
نعتبر الدوران  $r$  الذي مركزه  $\omega$  وزاويته  $\theta$

$$r(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \overline{(\Omega M, \Omega M')} \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

$$\begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg \frac{z' - \omega}{z - \omega} \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \quad \text{اذن}$$

$$z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega) \quad \text{ومنه}$$

### خاصية

التمثيل العقدي للدوران الذي مركزه  $\omega$  وزاويته  $\theta$

$$z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega) \quad \text{هو}$$